第５講　微分法・積分法②

【CHECK & UP】

1 ［1］　3 つの放物線 $C_1 : y=x^2$，$C_2 : y=x^2-6x+9$，$C_3 : y=x^2-4x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［2］　曲線 $C : y=-x^3+9x^2$，$D : y=-x^3+6x^2+7x$ および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

2 ［1］　放物線 $C : y=2x^2-8x+7$ と直線 $l : y=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［2］　2 つの放物線 $C : y=x^2+12$ と $D : y=-x^2-10x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

［3］　座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とし，直線 $y=ax$ を l とする．ただし，$0<a<1$ とする．C と l で囲まれた図形の面積を S_1 とし，次に C と l と直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．S_1+S_2 を a で表せ．

3 ［1］　放物線 $C : y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ の $x=0$ における接線を l とする．C と l と $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［2］　2 つの放物線 $C_1 : y=-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{16}{3}$，$C_2 : y=-x^2-4x$ の交点の座標を求めよ．また，C_1，C_2 と $x=0$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［3］　放物線 $C : y=\dfrac{x^2}{6}$ の $x=6$ における接線を l とする．C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

［4］　放物線 $C : y=x^2$ の $x=a$ $(-1<a<0)$ における接線を l とする．C と l，および $x=0$，$x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　方程式 $t^3-3t-2=0$ の解は $t=$ アイ , ウ である．

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ を C とする．C 上の点 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-1\right)$ を通り，C における接線に垂直な直線 m を考え，$t=$ アイ , ウ に対応する直線 m を，それぞれ m_1，m_2 とし，m_1 と m_2 の交点を P とする．点 P の座標は $\left(\text{エ},\ \frac{\text{オ}}{\text{カ}}\right)$ である．

m_1 と放物線 C の二つの交点のうち，x 座標が アイ と異なる点を Q とすると，Q の x 座標は キ である．

同様に，m_2 と C の二つの交点のうち，x 座標が ウ と異なる点を R とすると，R の x 座標は クケ である．

このとき，二つの線分 PQ，PR および C で囲まれた図形の面積は コサ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ a が $0<a<\frac{2}{3}$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{A}\left(1+\frac{a}{2},\ 3a-\frac{5}{2}a^2\right)$ の軌跡は方程式

$$y=-10x^2+\boxed{\text{アイ}}\,x-\boxed{\text{ウエ}}$$

で表される放物線 D の $1<x<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の部分である．

放物線 $y=2x-x^2$ を C とし，C の軸を l とする．放物線 D の $1\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ の部分と放物線 $y=2x-x^2$，l で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

［2］ 座標平面において，点 $(a,\ 1)$ を中心とし，x 軸に接する円を C_1 とする．また，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ を C_2 とし，C_2 上に点 $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$ をとる．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1) C_1 の方程式は $(x-\boxed{\text{ア}})^2+(y-\boxed{\text{イ}})^2=\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) P における C_2 の接線 l の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である．したがって，l の方程式は

$$y=\boxed{\text{エ}}\,x-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}b^{\boxed{\text{キ}}}$$

である．また，P を通り，l に直交する直線 m の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}b^{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セ}}$$

である．

(3) C_1 の中心が m 上にあるとする．このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}b^{\boxed{\text{チ}}}$ が成り立つ．

さらに，C_1 が P を通るとき $b=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$，$a=\dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{2}$ である．

このとき，C_1 は P において l に接し，l と x 軸のなす角は $\boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である．

また，2 直線 $x=0$，$x=a$ の間にあって，C_1 と C_2 と x 軸の三つで囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}-\frac{\pi}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする．

C_1：$y=x^2$

C_2：$y=x^2-4ax+4a(a+1)$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする．

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$y=$ ア $tx-t^{イ}$

であり，この直線が C_2 に接するのは $t=$ ウ のときである．

したがって，直線 l の方程式は

$y=$ エ $x-$ オ

であり，l と C_2 の接点の座標は

(カキ ＋ ク ， ケコ ＋ サ)

である．

(2)　C_1 と C_2 の交点を P とすると，P の座標は

$(a+$ シ ，$(a+$ シ $)^2)$

である．点 P を通って直線 l に平行な直線を m とする．直線 m の方程式は

$y=$ ス $x+a^{セ}-$ ソ

である．直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は

$a>$ タ である．

$a>$ タ のとき，C_1 の $x\geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$S=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$(テ $+1)^{ト}$(ナニ $-1)$

と表される．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　微分法・積分法②

1　Oを原点とする座標平面において，2点A(1, 0)，B(−1, 0)をとる．次の二つの曲線 C_1，C_2 を考える．

C_1：$y=mx^2+nx$　　　　C_2：$y=px^3+qx^2+rx$

ここで C_1 は2点O，Aを通り，C_1 のOにおける接線の傾きは1である．また，C_2 は3点O，A，Bを通り，C_2 のOにおける接線の傾きは $a(a>0)$ である．

(1)　このとき，$m=$ [アイ]，$n=$ [ウ] であり，$p=$ [エオ]，$q=$ [カ]，$r=$ [キ] である．

(2)　C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x=0$, [ク], $\dfrac{[ケ]}{[コ]}-$ [サ] である．したがって，C_1 と C_2 が $0<x<1$ において交わるような a の値の範囲は

$\dfrac{[シ]}{[ス]}<a<$ [セ]

である．

(3)　a は $0<a<1$ を満たすとする．C_1 のAにおける接線を l_1 とすると，l_1 の方程式は

$y=$ [ソ] $x+$ [タ]

である．C_2 のOにおける接線を l_2 とする．x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{[チ]}{[ツ]([テ]+1)}$

である．また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積は

$\dfrac{[ト]}{[ナ]}$

である．

l_2 と C_1 で囲まれた部分の面積を S_1 とし，また，l_1，l_2 および C_1 の三つで囲まれた部分の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ となるのは

$a=\dfrac{[ニ]}{[ヌ]}$

のときである．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 座標平面上で三つの曲線

C_1：$y=-x^2-4x$

C_2：$y=-x^2+2x$

C_3：$y=k(-x^2+ax+b)$

を考える．ただし，a，b，k は定数で，$k>0$ とする．

(1) C_1 と C_2 の交点 P の座標は（ **ア** ，**イ** ）である．

(2) 点 Q$(-4,\ 0)$ における C_1 の接線の方程式は

$y=$ **ウ** $x+$ **エオ**

であり，点 R$(2,\ 0)$ における C_2 の接線の方程式は

$y=$ **カキ** $x+$ **ク**

である．

(3) C_3 が2点 Q，R を通るとする．このとき

$a=$ **ケコ** ，$b=$ **サ**

である．さらに点 Q における C_1 の接線と C_3 の接線が一致するのは

$k=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$

のときである．このとき，第2象限において，曲線 C_1，C_3 および y 軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 $a>0$ として

$$f(x)=-x^2+2ax$$

$$g(x)=2x^2$$

とおく．

(1) 関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

で定義すると

$$F(x)=-x^{\boxed{ア}}+\boxed{イ}\,x^{\boxed{ウ}}$$

である．二つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}a^{\boxed{キ}}$$

と表される．

(2) $$T(a)=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$$

とおき，$T(a)$ を a の関数と考える．$T(a)$ は

$0<a<\boxed{ク}$ のとき　$T(a)=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}a^{\boxed{シ}}-\boxed{ス}\,a+\boxed{セ}$

$a\geqq\boxed{ク}$ のとき　$T(a)=\boxed{ソ}\,a-\boxed{タ}$

と表される．したがって，$a>0$ の範囲において，$T(a)$ は

$$a=\frac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$$

のとき，最小値

$$\boxed{ト}-\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$$

をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法②

【CHECK & UP】

1　[1]　C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$x^2=x^2-6x+9$　より　$x=\dfrac{3}{2}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は

$x^2-6x+9=x^2-4x$　より　$x=\dfrac{9}{2}$

C_3 と C_1 の交点の x 座標は

$x^2=x^2-4x$　より　$x=0$

よって，グラフの概形は右下図.

求める面積は

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\{x^2-(x^2-4x)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\{(x^2-6x+9)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}4xdx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}(-2x+9)dx$$

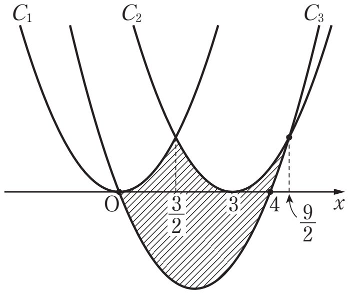
$$=\Big[2x^2\Big]_0^{\frac{3}{2}}+\Big[-x^2+9x\Big]_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{9}{2}+\left\{-\left(\frac{81}{4}-\frac{9}{4}\right)+9\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)\right\}$$

代入して引き算を「項ごとに」.

$$=\frac{9}{2}-18+27=\mathbf{\frac{27}{2}}$$

面積を出す単問練習．交点およびそれぞれのグラフの形をもとに「上下関係」の概形を描き，∫で面積を求める．まずは連立して交点，といいたいところだが，それぞれの式が因数分解できる場合は「x 軸との交点」がわかる．今回の３グラフは全てわかり，かつ C_1 と C_2 は x 軸に接している．よって概形は交点を求めずともわかる設定である．こうした「x 軸との関わり合い」が薄ければ「交点の y 座標」，または放物線ならば「頂点」などで上下関係がわかる．グラフの数が増えたときに意識したい．
実際の入試では流れの中で交点が出ていたり，そもそも交点から直線や曲線を作っていたりする場合もある．
今回の問題は後に挙げる「面積公式」を使うと逆に煩雑となる．公式を運用する前に，この程度の∫であれば余裕で計算できる確固たる計算力を身につけておくこと．



[2]　C と D の交点の x 座標は　$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$

$3x^2-7x=0$　　よって　$x=0,\ \dfrac{7}{3}$

３次関数の積分はセンター試験の範囲外であるが，このように「３次の係数が同じ２つの３次関数」であれば引き算で x^3 の項が消えるため範囲内．今回も x 軸との交点が補助となる．

求める面積は

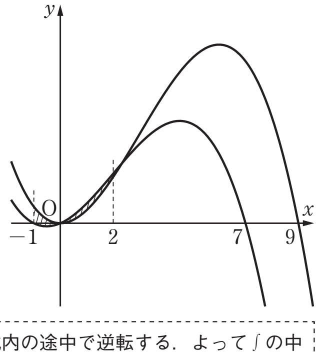
$$\int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}dx$$

$$+\int_0^2\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_0^2(-3x^2+7x)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=-\left(-1-\frac{7}{2}\right)-(8-14)=\mathbf{\frac{21}{2}}$$



２グラフの上下が変域内の途中で逆転する．よって∫の中が±逆になる．しかしながら，マイナスは∫の外に出せるので，実際の積分計算は１回で済む．また，積分範囲の片方が「0」なので，通常の∫の計算では無視できる．とにかく「マイナス」に細心の注意を払うこと．計算が苦手ならマイナスの瞬間はスピードダウンさせること．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

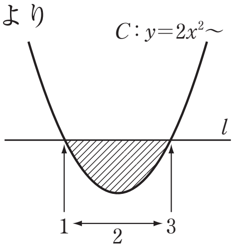
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　C と l の交点は $2x^2-8x+7=1$ より

$x^2-4x+3=0$　　$x=1,\ 3$

よって求める面積は

$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2^3=\mathbf{\frac{8}{3}}$

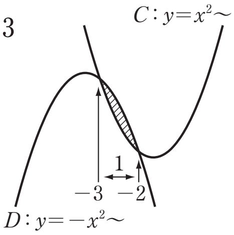


[2]　C と D の交点は　$x^2+12=-x^2-10x$ より

$x^2+5x+6=0$　　$x=-2,\ -3$

よって求める面積は

$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1^3=\mathbf{\frac{1}{3}}$



[3]　C と l の交点は　$x^2=ax$ より

$x^2-ax=0$　　$x=0,\ a$

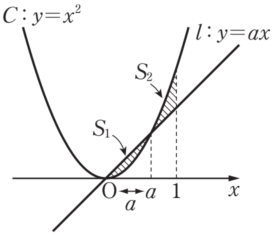
$0<a<1$ より，求める面積は

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot a^3+\int_a^1(x^2-ax)dx$$

$$=\frac{1}{6}a^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$$

$$=\mathbf{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}}$$



いわゆる「$\frac{1}{6}$ 公式」である．

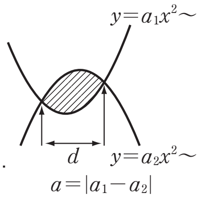
- ２グラフで「囲まれている」
- 上のグラフの式から下のグラフの式を引き算したものが「２次式」のとき，
- 引き算したあとの x^2 の係数を a
- ２交点の距離を d

とすると，２グラフで囲まれた部分の面積は

$\frac{1}{6}\cdot a\cdot d^3$

である．

a がマイナスのときはプラスにすること．



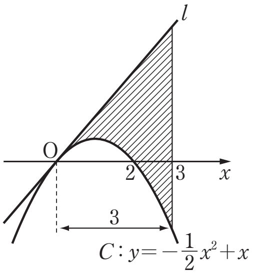
- 放物線と直線（斜めでも真横でもよい）
- 放物線と放物線（凸方向は問わず）
- ３次の係数が同じ２つの３次関数で「囲まれた部分」の面積

はこの公式．特に直線が絡む場合，「直線の式」は面積には全く無関係である．たとえ直線の式が出ていなくても面積は出すことができる．

近年は出題が減少しているが未だに現役の公式である．また，面積を求める図形の「一部」に使える場合もある．

3 [1]　図より求める面積は

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 3^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$



[2]　C_1 と C_2 の交点は

$-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}=-x^2-4x$

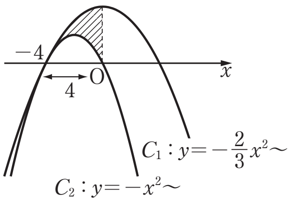
$x^2+8x+16=0$　　$x=-4$

よって，C_1 と C_2 は

この点において接する．

図より求める面積は

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 4^3=\mathbf{\frac{64}{9}}$



いわゆる「$\frac{1}{3}$ 公式」である．

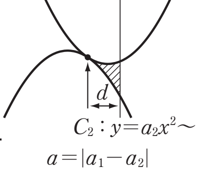
- ２グラフが「接する」
- 「接点が面積を求める変域内」
- 上のグラフの式から下のグラフの式を引き算したものが「２次式」のとき，
- 引き算したあとの x^2 の係数を a
- 接点から変域の端点までの距離を d

とすると，２グラフで囲まれた部分の面積は

$\frac{1}{3}\cdot a\cdot d^3$

である．

a がマイナスのときはプラスにすること．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［3］　放物線の 2 接線の交点の x 座標は

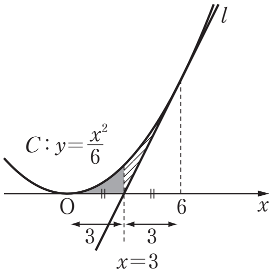
2 接点の x 座標の中点である．

よって，l と x 軸との交点の

x 座標は　$x=3$

ゆえに，求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3^3\times 2=\mathbf{3}$$



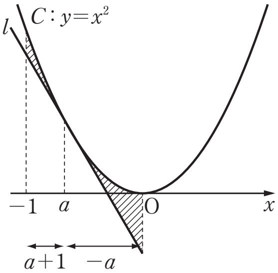
［4］　図より求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(a+1)^3+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-a)^3$$

$$=\frac{1}{3}(a+1)^3-\frac{1}{3}a^3$$

$$=\frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1)-\frac{1}{3}a^3$$

$$=\boldsymbol{a^2+a+\frac{1}{3}}$$



この公式は
・放物線と接線
（斜めでも真横でもよい）
・放物線と放物線が接する
（凸方向は問わず）
において多用される．特に「接線」が絡む場合，「接線の式」は面積には全く無関係である．センター試験の流れ上少ないが，たとえ接線の式が出ていなくても面積は出すことができる．
この公式はセンター試験では頻出である．特に放物線が「x 軸と接する」とき，「接線という言葉がない」ため気づきにくい．
また万が一「接点が端点でない」ときには，「接点で区切る」ことで公式が使える．特に２接線と放物線で囲まれた部分の面積に使える「$\frac{1}{12}$ 公式」はこれを元に作成できる．よって今この公式を知らない人がこれから覚えるべき公式ではないので紹介はしない．

積分＝面積ではないが，センター試験では面積の問題は頻出である．微分に比べて圧倒的に時間がかかる中で，公式を使える場面を逃すと致命的であることは言うまでもない．ただし公式に頼るのではなく，上記のように $\int$ を正確に出す計算力があっての公式である．また，なぜ公式で面積が出せるのかについては割愛するが，興味がある人は「大学への数学 1：1 の対応 数学Ⅱ」（東京出版）の「積分」のページを一読するとよいであろう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$t^3-3t-2=0$ より　$(t+1)^2(t-2)=0$　　$t=\mathbf{-1,\ 2}$

$C:y=\frac{1}{2}x^2-1$　　$y'=x$

$x=t$ における接線の傾きは t，法線の傾きは $-\frac{1}{t}$

よって法線の方程式は　$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2-1=-\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}t^2$

$t=-1$ のとき　$m_1:y=x+\frac{1}{2}$　　$t=2$ のとき　$m_2:y=-\frac{1}{2}x+2$

m_1 と m_2 の交点 P の x 座標は　$x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x+2$　　$x=1$　　よって　$\mathrm{P}\left(\mathbf{1,\ \frac{3}{2}}\right)$

C と m_1 の交点は　$\frac{1}{2}x^2-1=x+\frac{1}{2}$　　$x^2-2x-3=0$　　$x=-1,\ 3$

よって，Q の x 座標は **3** である．

C と m_2 の交点は　$\frac{1}{2}x^2-1=-\frac{1}{2}x+2$　　$x^2+x-6=0$　　$x=2,\ -3$

よって，R の x 座標は **−3** である．

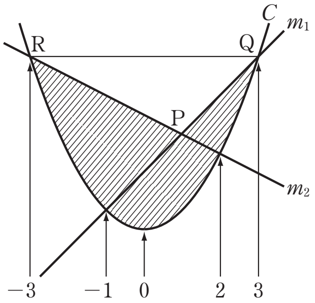
求める面積は

(弓形 RQ)−(三角形 RPQ)

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot6^3-\frac{1}{2}\cdot6\cdot2$

$=18-6$

$=\mathbf{12}$



2　[1]　$\mathrm{A}\left(1+\frac{a}{2},\ 3a-\frac{5}{2}a^2\right)$ より　$x=1+\frac{a}{2}$，$y=3a-\frac{5}{2}a^2$　とすると

$a=2x-2$　これと　$0<a<\frac{2}{3}$ より　$0<2x-2<\frac{2}{3}$　　$1<x<\frac{4}{3}$

$y=3(2x-2)-\frac{5}{2}(2x-2)^2=-10x^2+\mathbf{26}x-\mathbf{16}$

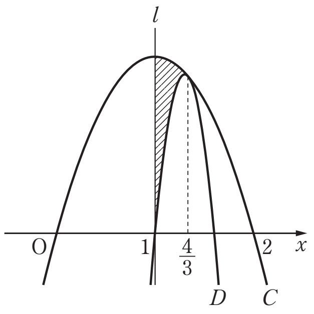
よって，求める点 A の軌跡は　放物線 $D:y=-10x^2+26x-16$　の $1<x<\mathbf{\frac{4}{3}}$ の部分．

$C:y=-x^2+2x$　　グラフは上に凸，軸は $x=1$

C と D の共有点は　$-x^2+2x=-10x^2+26x-16$　　$(3x-4)^2=0$　　$x=\frac{4}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって C と D は $x=\dfrac{4}{3}$ で接する.



ゆえに求める面積は

$$\int_1^{\frac{4}{3}}\{(-x^2+2x)-(-10x^2+26x-16)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{4}{3}}9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2dx$$

$$=\left[9\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)^3\right]_1^{\frac{4}{3}}=0-3\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

［2］ (1)　$C_1：(x-\boldsymbol{a})^2+(y-\mathbf{1})^2=\mathbf{1}$

(2)　$C_2：y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$

$x=b$ における接線の傾きは $\boldsymbol{b}$，方程式は　$l：y=b(x-b)+\dfrac{1}{2}b^2=\boldsymbol{b}x-\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^2$

$x=b$ における法線の方程式は　$m：y=-\dfrac{1}{b}(x-b)+\dfrac{1}{2}b^2=-\mathbf{\dfrac{1}{\boldsymbol{b}}}x+\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^2+\mathbf{1}$

(3)　C_1 の中心が m 上にあるので　$1=-\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{2}b^2+1$　　ゆえに　$a=\mathbf{\dfrac{1}{2}}b^3$

このとき　$C_1：\left(x-\dfrac{1}{2}b^3\right)^2+(y-1)^2=1$　　これが点 $\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$ を通るとき

$\left(b-\dfrac{1}{2}b^3\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}b^2-1\right)^2=1$　　$b^2-b^4+\dfrac{1}{4}b^6+\dfrac{1}{4}b^4-b^2+1=1$

$b^6=3b^4$　　$b\neq0$ より　$b^2=3$　　$b>0$ より　$b=\sqrt{\mathbf{3}}$

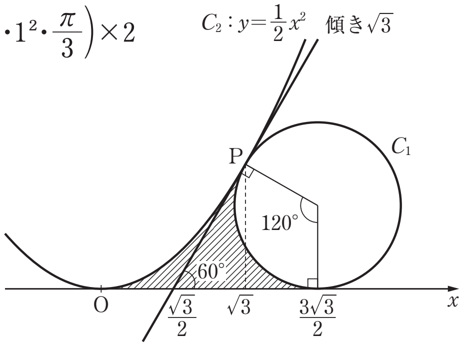
このとき　$a=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$ であり，l と x 軸とのなす角は $\mathbf{60}°$ である.

求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\times2+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}\right)\times2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}+\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{9\sqrt{3}}{8}}-\mathbf{\frac{\pi}{3}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$C_1: y=x^2$　　$C_2: y=x^2-4ax+4a(a+1)$　$(a>0)$

(1)　C_1 で $y'=2x$

$x=t$ における C_1 の接線の方程式は　$y=2t(x-t)+t^2=\mathbf{2}tx-t^2$

これが C_2 と接するのは　$x^2-4ax+4a(a+1)=2tx-t^2$

つまり　$x^2-2(2a+t)x+4a(a+1)+t^2=0$　……①　で判別式 $D=0$ のときである．

$\dfrac{D}{4}=(2a+t)^2-4a(a+1)-t^2=0$　　$4a^2+4at+t^2-4a^2-4a-t^2=0$

$4at=4a$　　$a>0$ より　$t=\mathbf{1}$

このとき，①は重解　$x=2a+t=2a+1$　をもつ．

よって，直線 l の方程式は　$y=\mathbf{2}x\mathbf{-1}$，l と C_2 の接点の座標は $(\mathbf{2a+1},\ \mathbf{4a+1})$

(2)　$x^2=x^2-4ax+4a(a+1)$ より　$4ax=4a(a+1)$　　よって　$x=a+1$

したがって，C_1 と C_2 の交点の座標は　$\mathrm{P}(a+\mathbf{1},\ (a+1)^2)$　である．

点 P を通り，直線 l と平行な直線の方程式は

$m: y=2(x-a-1)+(a+1)^2=\mathbf{2}x+a^2\mathbf{-1}$

直線 m の y 切片が正となるのは　$a^2-1>0$ より $a>\mathbf{1}$ のときである．

$a>1$ のとき　求める面積は

$$S=\frac{1}{2}(a^2-1)(a+1)+\frac{1}{6}(a+1)^3$$

$$=\frac{1}{2}(a+1)^2(a-1)+\frac{1}{6}(a+1)^3$$

$$=\frac{1}{6}(a+1)^2\{3(a-1)+a+1\}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\boldsymbol{a}+1)^2(\mathbf{2}\boldsymbol{a}-1)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　微分法・積分法②

1 (1)　$C_1: y=mx^2+nx$ が，点 A(1, 0) を通るので　$m+n=0$

また　C_1 の O における接線の傾きは 1 より　$y'=2mx+n$　から　$n=\mathbf{1}$

よって　$m=\mathbf{-1}$

$C_2: y=px^3+qx^2+rx$ が点 A(1, 0)，B(−1, 0) を通るので

$C_2: y=px(x-1)(x+1)=px^3-px$ とおける．よって　$q=\mathbf{0}$

また，C_2 の O における接線の傾きは a より　$y'=3px^2-p$　から　$-p=a$　$p=\boldsymbol{-a}$

よって　$C_2: y=-ax^3+ax$　より　$r=\boldsymbol{a}$

(2)　$C_1: y=-x^2+x$，$C_2: y=-ax^3+ax$ より，C_1，C_2 の交点の x 座標は

$$-x^2+x=-ax^3+ax \qquad x\{ax^2-x-(a-1)\}=0 \qquad x(x-1)(ax+a-1)=0$$

よって　$x=0,\ \mathbf{1},\ \dfrac{1-a}{a}=\boldsymbol{\dfrac{1}{a}-1}$　である．

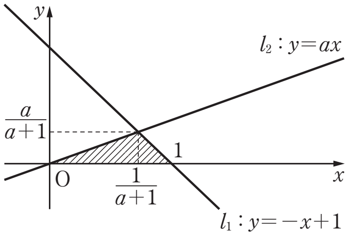
C_1 と C_2 が $0<x<1$ で交点をもつのは $0<\dfrac{1}{a}-1<1$　$1<\dfrac{1}{a}<2$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}<a<\mathbf{1}$

(3)　C_1 の A における接線 l_1 は　$y'=-2x+1$ より　$y=-(x-1)=\mathbf{-x+1}$

C_2 の O における接線 l_2 は　$y=ax$

l_1 と l_2 の交点の x 座標は　$-x+1=ax$　　$x=\dfrac{1}{a+1}$

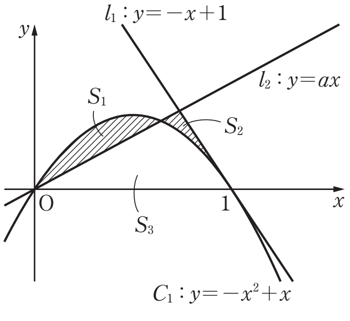


よって，x 軸と l_1，l_2 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{a}{a+1}=\boldsymbol{\frac{a}{2(a+1)}} \quad \cdots\cdots①$$

また，x 軸と C_1 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}} \quad \cdots\cdots②$$



また，題意の S_1，S_2 に加え，右図のように S_3 を定めると

$S_1=S_2$ となるのは　$S_1+S_3=S_2+S_3$

すなわち，①=② のときである．

$$\frac{a}{2(a+1)}=\frac{1}{6} \qquad 3a=a+1 \qquad \text{ゆえに}\quad a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

2 (1)　$C_1: y=-x^2-4x=-x(x+4)$　$C_2: y=-x^2+2x=-x(x-2)$

よって，C_1 と C_2 の交点 P(**0**, **0**)

(2)　点 Q(−4, 0) における C_1 の接線の方程式は

$y'=-2x-4$　より　$y=4(x+4)=\mathbf{4x+16}$

点 R(2, 0) における C_2 の接線の方程式は

$y'=-2x+2$　より　$y=-2(x-2)=\mathbf{-2x+4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

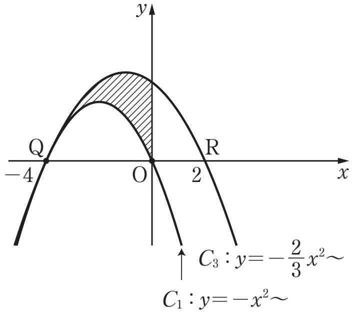
(3)　C_3 が 2 点 Q, R を通るとき　$C_3 : y=-k(x+4)(x-2)=k(-x^2-2x+8)$　とおける.

これを　$C_3 : y=k(-x^2+ax+b)$　と比較して　$a=\mathbf{-2}$, $b=\mathbf{8}$

さらに, C_1 と C_3 が Q において共通接線をもつのは, Q における C_1 と C_3 の接線の傾きが等しいとき.

C_3 で　$y'=-2kx-2k$ より　$x=-4$ における C_1 と C_3 の接線の傾きを考えて

$6k=4$　　ゆえに　$k=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ のとき.



このとき第 2 象限において, 接する 2 曲線 C_1, C_3 および y 軸で囲まれる部分の面積は,

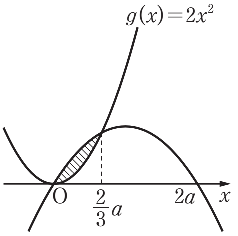
x^2 の係数の差が $\dfrac{1}{3}$ であることより　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 4^3=\mathbf{\dfrac{64}{9}}$

3　$f(x)=-x^2+2ax=-x(x-2a)$　　$g(x)=2x^2$

(1)　$F(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt=\int_0^x(-3t^2+2at)dt=\left[-t^3+at^2\right]_0^x=-x^3+\boldsymbol{a}x^2$

$f(x)-g(x)=-x(3x-2a)$ より

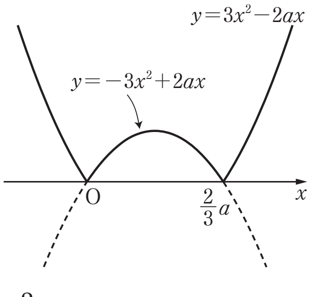
2 放物線の交点の x 座標は　$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$



よって, 2 放物線で囲まれた図形の面積 S は

$S=\dfrac{1}{6}\cdot 3\cdot\left(\dfrac{2}{3}a\right)^3=\mathbf{\dfrac{4}{27}}a^3$

(2)　$y=|f(x)-g(x)|=|-x(3x-2a)|$ のグラフは右図.



よって　$\dfrac{2}{3}a<2$　つまり　$0<a<\mathbf{3}$ のとき

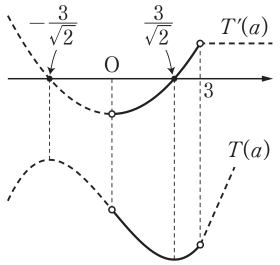
$T(a)=\dfrac{4}{27}a^3+\int_{\frac{2}{3}a}^{2}(3x^2-2ax)dx=\dfrac{4}{27}a^3+\left[x^3-ax^2\right]_{\frac{2}{3}a}^{2}$

$=\dfrac{4}{27}a^3+8-4a-\left(\dfrac{8}{27}a^3-\dfrac{4}{9}a^3\right)=\mathbf{\dfrac{8}{27}}a^3\mathbf{-4}a\mathbf{+8}$

$a\geqq 3$ のとき　$T(a)=\int_0^2(-3x^2+2ax)dx=\left[-x^3+ax^2\right]_0^2=\mathbf{4}a\mathbf{-8}$

$a\geqq 3$ のとき $T(a)$ は単調増加.

よって, $T(a)$ の最小値は $0<a<3$ のときを考えればよい.



$T'(a)=\dfrac{8}{9}a^2-4=\dfrac{4}{9}(2a^2-9)$

$a=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき　$T'(a)=0$

よって　$a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$　のとき

最小値　$T\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3-4\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+8=\mathbf{8-4\sqrt{2}}$　をとる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。